TD n°1: Fonctions analytiques, séries entières

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un † sont à faire en priorité, ceux marqués d'un † sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Séries entières

Exercice 1. Vrai-faux d'échauffement.
Vrai ou faux ? Donner une démonstration ou un contre-exemple. On considère $f(z), g(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$, et on note $\rho(f)$ le rayon de convergence d'une série entière f. On va utiliser la caractérisation comme quoi $\rho(f)$ est le sup des réels $r > 0$ tels que $|a_n|r^n$ est bornée. On écrit $f(z) = \sum a_n z^n$ et $g(z) = \sum b_n z^n$.

1. $\rho(f+g) \geqslant \min(\rho(f), \rho(g))$ et $\rho(fg) \geqslant \min(\rho(f), \rho(g))$.

   Vrai et vrai. Si $|a_n|r^n$ et $|b_n|r^n$ sont bornés, alors $|a_n + b_n|r^n \leqslant |a_n|r^n + |b_n|r^n$ est bornée.
   Similairement, si $r < r' < \min(\rho(f), \rho(g))$, en prenant $C > 0$ telle que $|a_n|r'^n < C'$ et $|b_n|r'^n < C'$, on a

   $$\left|\sum a_k b_{n-k}\right| r^n \leqslant (r/r')^n \sum |a_k| r'^k |b_{n_k}| r'^{n-k} \leqslant nC(r/r')^n.$$

2. Si $\rho(f) > \rho(g)$, alors $\rho(f+g) = \rho(g)$.

   Vrai. Soit $r > 0$: on a $|a_n + b_n|r^n \geqslant |b_n|r^n - |a_n|r^n$. Pour $\rho(f) > r > \rho(g)$, on a $|a_n|r^n$ borné et $|b_n|r^n$ non-borné, donc $\rho(f+g) \leqslant \rho(g)$, ce qui conclut par l'item précédent.

3. Si $\rho(f) > \rho(g)$, alors $\rho(fg) = \rho(g)$.

   Faux. $f(z) = 1 - z$, $g(z) = \frac{1}{1-z}$.

4. Si $f \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ converge sur le cercle $|z| = r$, alors $\rho(f) \geqslant r$. Et en remplaçant la conclusion par $\rho(f) > r$?

   Vrai, faux. Si $\sum a_n z^n$ converge pour $|z| = r$ alors forcément $|a_n|r^n$ est bornée. Un contre-exemple à la deuxième affirmation est donné par $\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ sur le cercle $|z| = 1$.

5. $\rho(f) = \rho(f')$.

   Vrai, il suffit de remarquer que $a_n R^n \to 0$ si, et seulement si $(n+1)a_{n+1}R^n \to 0$.

Exercice 2. Série harmonique.
On définit, pour $n \geqslant 1$, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, et

$$H(z) = \sum_{n \geqslant 1} H_n z^n.$$

Calculer le rayon de convergence de cette série et démontrer que $H(z) = -\frac{\log(1-z)}{1-z}$ formellement (et donc pour tout z dans le disque de convergence).
$H_n = \log(n) + O(1)$ donc le rayon de convergence est 1 par le critère de votre choix.
En écrivant $\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geqslant 0} z^n$ et $-\log(1-z) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n}$, on calcule :

$$\begin{aligned} -\frac{\log(1-z)}{1-z} &= \left(\sum_{n \geqslant 0} z^n\right) \cdot \left(\sum_{m \geqslant 1} \frac{z^m}{m}\right) \\ &= \sum_{\ell \geqslant 0} \left(\sum_{m+n=\ell, m \geqslant 1} \frac{1}{m}\right) z^\ell \\ &= \sum_{\ell \geqslant 0} H_\ell z^\ell. \end{aligned}$$

---

†Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

Exercice 3. Une expression explicite pour les suites de Lucas.
On considère, pour $a, b \in \mathbb{C}$, b non-nul, la suite définie par $L_0 = 0, L_1 = 1$ et $L_{n+1} = aL_n + bL_{n-1}$. On pose $L(z) = \sum_{n \geqslant 0} L_n z^n$.

1. Montrer que $L(z) = \frac{z}{1-az-bz^2}$.
   On vérifie que
   $$(1 - az - bz^2)L(z) = \sum_{n \geqslant 2} (L_n - aL_{n-1} - bL_{n-2})z^n + L_0 + L_1 z - aL_0 = z.$$

2. En écrivant $1 - az - bz^2 = -b(z - \alpha)(z - \beta)$ et en réalisant une décomposition en éléments simples, en déduire une expression explicite pour L_n. On pensera à différencier les cas $\alpha \neq \beta$ et $\alpha = \beta$.
   On vérifie que
   $$\frac{z}{-b(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{1}{b(\alpha - \beta)} \left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta} \right).$$
   De là, en écrivant
   $$\frac{1}{z-\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{1-(z/\alpha)} = -\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{\alpha^{n+1}} z^n$$
   on trouve
   $$L_n = \frac{1}{b(\beta - \alpha)} \left(\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} \right)$$
   Si $\alpha = \beta$, on a
   $$\frac{1}{-b(z-\alpha)^2} = \frac{1}{b\alpha^2} \sum_{n \geqslant 0} \frac{n}{\alpha^n} z^n$$

Exercice 4. Somme de carrés.
Notons $r_2(n)$ le nombre de points à coordonnées entières positives sur le cercle de rayon $\sqrt{n}$, et D_n le nombre de points à coordonnées entières positives dans le disque de rayon $\sqrt{n}$ (par exemple, $r_2(5) = 2$ car $2^2 + 1^2 = 1^2 + 2^2 = 5$). Démontrer que
$$\left(\sum_{m \geqslant 0} z^{m^2} \right)^2 = \sum_{n \geqslant 0} r_2(n) z^n$$
puis que
$$\frac{1}{1-z} \left(\sum_{m \geqslant 0} z^{m^2} \right)^2 = \sum_{n \geqslant 0} D_n z^n.$$
Quels sont les rayons de convergences de ces séries ?
On réécrit $\sum_{m \geqslant 0} z^{m^2} := \sum_{n \geqslant 0} c_n z^n$ où c_n est 1 si n est un carré et 0 sinon. On trouve donc
$$\left(\sum_{m \geqslant 0} z^{m^2} \right)^2 = \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{i+j=n} c_i c_j \right) z^n.$$
Il suffit à présent de voir que $\sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i} = r_2(n)$: pour ça, on remarque que $c_i c_{n-i}$ est 1 précisément quand $i + n - i = n$ est une écriture de n comme somme de deux carrés, ce qui conclut pour le premier calcul.
Le second calcul revient juste à écrire $D_n = \sum_{k=0}^{n} r_2(k)$.

Exercice 5. Un peu de combinatoire.
Soit P_n le nombre de façons de partitionner un ensemble de n éléments en morceaux de cardinal 1 ou 2, on considère $S(z) := \sum_{n \geqslant 0} \frac{P_n}{n!} z^n$.

1. Prouver l'égalité de séries entières
$$S'(z) = (1+z)S(z).$$
Prouver l'égalité $S'(z) = (1+z)S(z)$ revient à prouver $P_{n+1} = P_n + nP_{n-1}$ car
$$S'(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{P_{n+1}}{n!} z^n, (1+z)S(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{P_n}{n!} z^n + \sum_{n \geqslant 1} \frac{P_{n-1}}{(n-1)!} z^n.$$
Cette égalité se prouve combinatoirement : si on considère les partitions de $A_n := \{1, ..., n\}$, une partition de A_{n+1} en morceaux à 1 ou 2 éléments correspond soit à une partition de A_n (si $n+1$ est seul), soit au choix d'un élément i de A_n (le compagnon de $n+1$) et une partition de $A_n \setminus \{i\}$.

2. En déduire une expression de $S(z)$.
L'équation différentielle se résout explicitement dans $\mathbb{C}[\![z]\!]$ par $S(z) = Ce^{z+\frac{z^2}{2}}$. Comme $S(0) = 1$, on sait que $C = 1$.

3. En déduire une formule pour P_n.
Il suffit à présent de développer :
$$\begin{aligned} e^{z+\frac{z^2}{2}} &= e^z e^{z^2/2} \\ &= \left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{m \geqslant 0} \frac{z^{2m}}{2^m m!} \right) \\ &= \sum_{k \geqslant 0} \left(\sum_{n+2m=k} \frac{k!}{n! 2^m m!} \right) \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$
On trouve finalement
$$P_k = \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{k!}{m!(k-2m)! 2^{k-2m}}.$$

Exercice 6. L'anneau $\mathbb{C}[\![z]\!]$.
On introduit sur $\mathbb{C}[\![z]\!]$ la valuation ord définie par
$$\operatorname{ord}\left(\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \right) = \min\{n \geqslant 0 : a_n \neq 0\}$$
et $\operatorname{ord}(0) = +\infty$.

1. Montrer que $\operatorname{ord}(f) \geqslant k$ si, et seulement si z^k divise f dans $\mathbb{C}[\![z]\!]$.
$\operatorname{ord}(f) \geqslant k$ si et seulement si $a_0 = ... = a_{k-1} = 0$, auquel cas
$$f(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + ... = z^k (a_k + a_{k+1} z + ...).$$
Réciproquement, si $f(z) = z^k g(z)$ pour une certaine g, alors ses k premiers coefficients sont nuls et $\operatorname{ord}(f) \geqslant k$.

2. Vérifier que $\operatorname{ord}(fg) = \operatorname{ord}(f) + \operatorname{ord}(g)$.
En posant $m = \operatorname{ord}(f)$, $n = \operatorname{ord}(g)$, on a $f = z^m u(z), g = z^n v(z)$ avec $u(0), v(0) \neq 0$. On a alors $fg = z^{m+n} uv$, où le coefficient constant de uv est $u(0)v(0)$ qui est non-nul.

3. Montrer que $f(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ est inversible si et seulement si elle vérifie $\operatorname{ord}(f) = 0$. En particulier, tout élément $f(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ s'écrit uniquement comme $f(z) = z^n g(z)$ avec g inversible et $n = \operatorname{ord}(f)$.
Comme $\operatorname{ord}(f) = 0$, $a_0 \neq 0$, et donc quitte à multiplier par $1/a_0$ on peut supposer que $f(z) = 1 - zg(z)$. De là, les propriétés de composition des séries entières nous assurent que $(1 - zg(z)) \cdot \frac{1}{1-zg(z)} = 1$.

4. Soit $I \subsetneq \mathbb{C}[\![z]\!]$ un idéal. Montrer que $I \subseteq z\mathbb{C}[\![z]\!]$.
Comme I est un idéal propre, il ne contient aucun élément inversible, donc tous ses éléments sont d'ordre $\geqslant 1$, et donc multiples de z.

5. Montrer qu'en fait il existe m tel que $I = z^m\mathbb{C}[\![z]\!]$. L'anneau $\mathbb{C}[\![z]\!]$ est un anneau principal !
Soit $f(z)$ un élément d'ordre minimal m dans I : on écrit $f(z) = z^m u(z)$ avec g inversible. Si $g(z) = z^m h(z)$, alors $g(z) = f(z)u(z)^{-1}h(z) \in I$, d'où $z^m\mathbb{C}[\![z]\!] \subseteq I$. Comme m est minimal, tout élément de I est multiple de z^m, ce qui conclut.

6. Vérifier que les résultats de cet exercice restent valides si l'on remplace $\mathbb{C}[\![z]\!]$ par l'anneau $\mathbb{C}\{z\}$ des séries entières de rayon de convergence > 0.
Le seul point réellement délicat est la convergence de la série entière
$$\frac{1}{1 - zg(z)}$$
si $1 - zg(z)$ est convergente, mais ça découle de la convergence du composé de séries entières convergentes (on pourrait aussi s'amuser à borner explicitement vu que les coefficients sont raisonnablement sympathiques).

Exercice 7. Composition de séries entières.
Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \in \mathbb{C}[\![z]\!]$, $h(z) = \sum_{n\geqslant 1} c_n z^n \in \mathbb{C}[\![z]\!]$. On note $\sum_{n\geqslant m} C_{m,n} z^n$ la série entière $h(z)^m$. On définit la série entière composée $f(h(z))$ comme :
$$f(h(z)) = \sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m C_{m,n} \right) z^n.$$

1. Montrer que $(f+g)(h(z)) = f(h(z)) + g(h(z))$ par calcul direct. Pouvez-vous montrer la même propriété pour le produit ?
L'expression des coefficients de $f \circ g$ est linéaire en les $(a_n)_n$. Pour le produit, j'ai essayé et je n'ai pas réussi.
On note $f_m(z)$ le polynôme $a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$ et $h_n(z)$ le polynôme $c_1 z + \ldots + c_n z^n$

2. Montrer que pour $m, n \geqslant k$, les termes de degré $\leqslant k$ du polynôme $f_m(h_n(z))$ ne dépendent pas de $m, n > k$ et sont les mêmes que ceux de la série entière $f(h(z))$.
On commence par observer que pour u polynôme et $n, n' > k$, les termes d'ordre $\leqslant k$ de $u(h_n(z))$ et $u(h_{n'}(z))$ sont les mêmes.
Pour $r > k$, $h_n(z)^r$ n'a que des termes d'ordre $> k$ puisqu'il est de la forme $z^r v(z)$. Soient donc $m, m' > k$, $f_m(h_n(z))$ et $f_{m'}(h_n(z))$ ont les mêmes termes d'ordre $\leqslant k$ puisque leur différence ne comporte que des termes de la forme $h(z)^r$. Par conséquent, $f_m(h_n(z))$ et $f_{m'}(h_{n'}(z))$ ont les mêmes termes d'ordre $\leqslant k$.
Comme le coefficient $C_{m,n}$ ne fait intervenir que les coefficients de h de degré $\leqslant n$, c'est aussi le coefficient de z^n dans $h_n(z)^m$. Vu que le coefficient de z^n dans $f(h(z))$ ne fait intervenir que les a_r et $C_{r,n}$ pour $r \leqslant n$, c'est aussi le coefficient de z^n dans $f_m(h_n(z))$ pour $m \geqslant n$.
Tout ce raisonnement est rendu beaucoup plus simple en travaillant dans $\mathbb{C}[z]/(z^k)$ et $\mathbb{C}[\![z]\!]/(z^k)$, et notamment en remarquant que les deux sont naturellement isomorphes. Notamment, demander à ce que les termes de degré $\leqslant k$ de deux séries entières u, v soient égaux revient à demander à ce que $u = v \mod z^{k+1}$. Ensuite, il suffit d'observer que $f(z) = f_m(z) \mod z^{k+1}$ et $h_n(z) = h(z) \mod z^{k+1}$ et comme $h(z)^r = 0 \mod z^{k+1}$ pour $r > k$, on a $f_m(h_n(z)) = f_m(h(z)) = f(h(z)) \mod z^{k+1}$.

3. En déduire que la composition est compatible au produit et associative.
L'égalité $f_m(h_n(z))g_m(h_n(z)) = (fg)_m(h_n(z)) \mod z^{k+1}$ pour $m, n > k$ permet de conclure pour le produit. L'associativité découle du fait que si g, h sont divisibles par z, alors pour $l, m, n > k$, on a $f_m(g_l \circ h_n(z))) = f_m \circ g_l(h_n(z))$ par associatvitié de la composition de polynômes. Comme les coefficients d'ordre $\leqslant k$ de $f_m \circ g_l$ sont ceux de $f \circ g$ et les coefficients d'ordre $\leqslant k$ de $g_l \circ h_m$ sont ceux de $g \circ h$, ce qui conclut.

4. Vérifier que si f et h ont un rayon de convergence non-nul, alors $f(h(z))$ a un rayon de convergence non-nul, et que $f(h(z))$ est bien le développement en série entière de la fonction $f \circ h$.
Comme h a un rayon de convergence positif, elle définit une fonction continue sur le disque fermé de

rayon r pour tout $r > 0$ assez petit. Comme h est continue et $h(0) = 0$, étant donné $r' > 0$, il existe un $r > 0$ tel que $h\big(\overline{\mathbb{D}}(0,r)\big) \subseteq \overline{\mathbb{D}}(0,r')$. Il suffit alors de prendre $r' < \rho(f)$: alors, pour $|z| \leqslant \min(r, r')$, on a convergence absolue de $\sum a_m h(z)^m$ et de $\sum C_{m,n} z^n$ et on peut échanger

$$\begin{aligned} f(h(z)) &= \sum_{m \geqslant 0} a_m h(z)^m \\ &= \sum_{m \geqslant 0} a_m \sum_{n \geqslant m} C_{m,n} z^n \\ &= \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m C_{m,n} \right) z^n. \end{aligned}$$

Exercice 8. Théorème de Cauchy pour les équations différentielles

On désire démontrer le théorème suivant :

Théorème de Cauchy : Soient $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}[\![z]\!]$. Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des solutions $y(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ de l'équation différentielle

$$y^{(n)}(z) + a_{n-1}(z) y^{(n-1)}(z) + ... + a_0(z) y(z) = 0 \tag{1}$$

est de dimension n, et un isomorphisme explicite avec $\mathbb{C}^n$ est donné par

$$y \mapsto \left[y(0), y'(0), ..., y^{(n-1)}(0) \right]^T.$$

De plus, si les a_i ont toutes un rayon de convergence $\geqslant R$, alors les solutions ont un rayon de convergence $\geqslant R$.

1. On pose $A(z) \in M_n\big(\mathbb{C}[\![z]\!]\big)$ la matrice

$$A(z) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(z) & -a_1(z) & \cdots & -a_{n-1}(z) \end{bmatrix}.$$

Démontrer que $y \mapsto [y(z), y'(z), ..., y^{(n)}(z)]^T$ réalise un isomorphisme entre l'espace des solutions de (1) et l'espace des $\boldsymbol{y}(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]^n$ vérifiant

$$\boldsymbol{y}'(z) = A(z) \boldsymbol{y}(z). \tag{2}$$

C'est une vérification directe : si $\boldsymbol{y}(z) = [y_0(z), ..., y_{n-1}(z)]^T$, l'équation $\boldsymbol{y}'(z) = A(z)\boldsymbol{y}(z)$ est équivalente à $y_i'(z) = y_{i+1}(z)$ pour $i = 0, ..., n-2$, donc $y_i(z) = y^{(i)}(z)$ et $y_{n-1}' = -a_{n-1} y_{n-1} - ... - a_0 y_0$, donc on retrouve l'équation voulue en remplaçant y_i par $y^{(i)}$.

2. Vérifier que la donnée de n solutions de (2) est équivalente à la donnée d'une matrice $Y(z) \in M_n\big(\mathbb{C}[\![z]\!]\big)$ vérifiant

$$Y' = AY. \tag{3}$$

Multiplier une matrice à gauche par A revient à multiplier ses colonnes par A.

3. Soit $Y \in \mathrm{GL}_n\big(\mathbb{C}[\![z]\!]\big)$ une solution de (3). Vérifier que $X = Y^{-1}$ est solution de l'équation différentielle $X'(z) = -X(z)A(z)$. On pourra penser à vérifier que la règle de Leibniz $(UV)' = U'V + UV'$ s'applique dans le cas de matrices.
On dérive la relation $YY^{-1} = \mathbf{1}_n$:

$$Y'Y^{-1} + Y(Y^{-1})' = 0$$

donc $(Y^{-1})' = -Y^{-1}Y'Y^{-1}$. Comme $Y' = AY$, on a

$$(Y^{-1})' = -Y^{-1}AYY^{-1} = -Y^{-1}A.$$

4. Démontrer que si $Y_1 \in \mathrm{GL}_n\big(\mathbb{C}[\![z]\!]\big)$, $Y_2 \in M_n\big(\mathbb{C}[\![z]\!]\big)$ sont des solutions de (3), la matrice $Y_1^{-1}Y_2$ est une matrice constante. En déduire que si une telle matrice Y_1 existe, l'espace des solutions de (2) est de dimension n sur $\mathbb{C}$.
On vérifie en appliquant la règle de Leibniz que $(Y_1^{-1}Y_2)' = 0$:
$$(Y_1^{-1})'Y_2 + Y_1^{-1}Y_2' = -Y_1^{-1}AY_2 + Y_1^{-1}AY_2 = 0.$$
Par conséquent, $Y_2 = Y_1C$ avec C une matrice constante : en particulier, les colonnes de Y_1 forment une $\mathbb{C}$-base de l'espace des solutions.

5. En écrivant $A(z) = \sum_{n\geqslant 0} A_n z^n$, résoudre (3) avec la condition $Y(0) = \mathbf{1}_n$. Vérifier que la matrice Y obtenue est inversible.
Indication : on pourra vérifier que la série entière $\det(Y(z))$ *est inversible*
C'est encore un calcul : on a d'une part
$$Y' = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)Y_{n+1}z^n$$
et d'autre part
$$AY = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n} A_kY_{n-k}\right)z^n.$$
Par conséquent, $Y' = AY$ et $Y(0) = \mathbf{1}_n$ si et seulement si $(Y_n)_n$ vérifie
$$\begin{cases} Y_0 = \mathbf{1}_n \\ Y_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} A_kY_{n-k} \end{cases}.$$
Il existe clairement une et une seule suite de matrices vérifiant ces conditions. Pour vérifier l'inversibilité de Y, il suffit de vérifier que $\det(Y)$ est une série entière inversible. Mais $Y(0) = \mathbf{1}_n$, donc $\det(Y(0)) = \det(Y)(0) = 1$. C'est donc une série entière inversible.

6. En déduire la partie formelle du théorème de Cauchy.
L'existence d'une matrice de solutions inversibles implique l'existence d'une base de cardinal n par les questions précédentes.

7. Utiliser l'expression explicite trouvée pour les coefficients de Y pour prouver la partie sur les rayons de convergence.
Indication : montrez que si $A(z)$ converge sur le disque de rayon R, alors $Y(z)$ converge sur le disque de rayon r pour tout $r < R$.
Notons $|M|$ la norme donnée par le sup des modules des coefficients de M. On a $|MN| \leqslant n|M|\cdot|N|$.
Si R est tel que A converge sur le cercle de rayon R, alors $|A_m| \leqslant CR^{-m}$ pour une constante réelle $C > 0$.
Soit $r < R$ un réel, on veut montrer qu'il existe une constante D (à déterminer) telle que $|Y_m| \leqslant Dr^{-m}$.
On procède par récurrence.
$$\begin{aligned}
|Y_{m+1}| &\leqslant \frac{n}{m+1}\sum_{k=0}^{m}|A_k|\cdot|Y_{m-k}| \\
&\leqslant \frac{n}{m+1}\sum_{k=0^m} CD(r/R)^k r^{-m} \\
&\leqslant \frac{CDn}{m+1}\cdot\frac{1}{1-r/R}\cdot r^{-m} \\
&\leqslant D\frac{Cnr}{(m+1)(1-r/R)}r^{-m-1}.
\end{aligned}$$
Il faut à présent choisir judicieusement la constante D. Pour m assez grand, l'inégalité $|Y_m| \leqslant Dr^{-m}$ sera vérifiée car $\frac{Cnr}{(m+1)(1-r/R)} \to 0$ quand $m \to \infty$, et donc elle devient inférieure à 1 à partir d'un certain rang m_0. Si l'on choisit D supérieure à $|Y_m|r^m$ pour tout $m < m_0$, alors certainement l'égalité sera vérifiée par défaut pour $m < m_0$, et elle le sera pour $m \geqslant m_0$ grâce au choix de m_0.

Fonctions analytiques

Exercice 9. Opérations sur les fonctions analytiques.
Montrer les propriétés suivantes :

1. Soit U un ouvert connexe et $f, g : U \to \mathbb{C}$ deux fonctions analytiques. Montrer que le produit $z \mapsto f(z)g(z)$ est analytique.
   La question est locale sur U, et le produit de séries entières convergentes est convergent (et le produit est compatible à l'évaluation en un point du domaine de convergence).

2. Soient $U, V \subseteq \mathbb{C}$ des ouverts et soient $g \colon U \to V$, $f \colon V \to \mathbb{C}$ des fonctions analytiques. Montrer que la fonction $f \circ g \colon U \to \mathbb{C}$ est analytique. En particulier si f est analytique sur un ouvert U et ne s'annule pas, la fonction $1/f$ est analytique (On pourra penser à l'exercice 7).
   La question est encore une fois locale sur U. Si l'on considère le développement de g au voisinage de $g(z_0) \in V$, le coefficient constant est nul, et on peut composer les séries entières correspondantes en toute sérénité.

3. Montrer que $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, de préférence sans calcul !
   L'identité $\cos^2 + \sin^2 = 1$ est déjà connue sur $\mathbb{R}$, et le principe des zéros isolés appliqué à la fonction $\cos^2(z) + \sin^2(z) - 1$ permet de conclure.

4. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe, on considère une fonction analytique f non nulle sur U et $K \subseteq U$ un compact. Montrer que f a un nombre fini de zéros dans K.
   L'ensemble $V(f) \subseteq U$ des zéros de f est discret dans U par le principe des zéros isolés. Si $K \subseteq U$ est compact, $K \cap V(f)$ est compact et discret et donc fini.

Exercice 10. Une fonction analytique qui ne se prolonge pas.
Démontrer que la série entière $\sum_{n \geqslant 0} z^{2^n}$ définit une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ qui diverge au voisinage de $e^{\frac{2ik\pi}{2^m}}$ pour $k \in \mathbb{Z}, m \geqslant 0$, et en déduire qu'il existe des fonctions analytiques sur le disque qui ne se prolonge à aucun ouvert connexe contenant strictement le disque.
Soit $r < 1$: pour $n \geqslant m$, $\left(re^{\frac{2ik\pi}{2^m}}\right)^{2^n} = r^{2^n}$ et donc

$$f\left(re^{\frac{2ik\pi}{2^m}}\right) = \sum_{n=0}^{m-1} r^{2^n} e^{\frac{2ik\pi}{2^{m-n}}} + \sum_{n \geqslant m+1} r^{2^n}.$$

Le premier terme est borné en module par m et le deuxième terme diverge vers $+\infty$ quand $r \to 1$, ce qui prouve que f diverge au voisinage de $e^{\frac{2ik\pi}{2^m}}$. Tout ouvert U contenant strictement $\mathbb{D}$ contient nécessairement un $e^{\frac{2ik\pi}{2^m}}$, et on ne peut donc pas prolonger f à U.

Exercice 11. Annulation des coefficients de Taylor.
Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe, f une fonction analytique sur U qui n'est pas un polynôme. Montrer qu'il existe un point $a \in U$ tel qu'aucun coefficient du développement en série entière de f au voisinage de a n'est nul.
Indication : on pourra montrer que l'ensemble des points où la non-annulation de tous les coefficients est vérifiée est un G_δ dense.
Considérons l'ensemble $U_n = \{a \in U : f^{(n)}(a) \neq 0\}$. C'est un ouvert non-vide (car f n'est pas un polynôme) qui est même dense dans U car son complémentaire, donné par $f^{(n)} = 0$, est discret. Par le théorème de Baire, une intersection d'ouverts denses est encore dense, et donc il existe un point $a \in \cap_{n \geqslant 0} U_n$.

Exercice 12. Sommation d'Abel.
Soit $(A_n)_{n \geqslant 0}$ et $(B_n)_{n \geqslant 0}$ deux suites de nombres complexes.

1. Montrer la *formule de sommation par partie* : pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} (A_{k+1} - A_k) B_k = (A_n B_n - A_0 B_0) - \sum_{k=0}^{n-1} A_{k+1}(B_{k+1} - B_k).$$

On a la somme téléscopique

$$\sum_{k=0}^{n-1}(A_kB_k - A_{k+1}B_{k+1}) = A_0B_0 - A_nB_n,$$

que l'on peut écrire comme

$$\sum_{k=0}^{n-1}(A_kB_k - A_{k+1}B_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(B_{k+1} - B_k) + B_k(A_{k+1} - A_k).$$

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes telle que la suite des sommes partielles $(\sum_{i=0}^{n} a_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, et $(B_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs, décroissante, tendant vers 0. Démontrer que la série $\sum_n a_nB_n$ converge.
Posons pour tout $n \geq 0$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_kB_k$. On va montrer que sous les hypothèses, $(S_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy. Posons $A \geqslant 0$ tel que $|A_n| \leqslant A$ pour tout $n \geq 0$. Alors pour $N, M \geq 0$ tels que $N > M$, on a par la sommation d'Abel

$$|S_N - S_M| = \left|A_NB_N - A_MB_M + \sum_{k=N}^{M-1} A_k(B_{k+1} - B_k)\right| \leqslant Ab_N + Ab_M + \sum_{k=M}^{N-1} A\,|B_{k+1} - B_k| \leqslant 2Ab_M.$$

Ceci conclut que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy et donc convergente.

3. Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de nombres réels tendant vers 0 telle que la série de terme général B_n est divergente. Montrer que la série entière $\sum_n B_nz^n$ a pour rayon de convergence 1 et est convergente en tout point de $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ sauf en $z = 1$.
Il est clair que le rayon de convergence de $\sum_n B_nz^n$ est $\leqslant 1$ puisque la série entière diverge pour $z = 1$. De plus pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, comme la suite des $|B_n|$ est bornée, disons par $C > 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |B_nz^n| \leqslant C\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{C}{1-|z|},$$

donc la série $\sum_n B_nz^n$ converge absolument en $|z| < 1$, par conséquent le rayon de convergence est 1. Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Pour démontrer que la série converge en z, on applique le critère d'Abel. Pour tout $N \geq 0$

$$\left|\sum_{n=0}^{N} z^n\right| \leqslant \frac{2}{|1-z|},$$

donc les sommes partielles des z^n sont bornées. On est donc est bien sous les hypothèses de la question précédente avec $a_n = z^n$ et par conséquent $\sum_n B_nz^n$ converge si $z \neq 1$.

Exercice 13. Lemme de la partie réelle.
Soit $f(z) = \sum_n a_nz^n$ une série entière à coefficients complexes, de rayon de convergence $+\infty$. Pour tout $r \in \mathbb{R}_{>0}$, notons $M(r) = \sup_{|z|\leqslant r} |f(z)|$ et $A(r) = \sup_{|z|\leqslant r} |\Re(f(z))|$. Le but de l'exercice est de montrer le lemme suivant :
Lemme de la partie réelle : Pour tous $r, R \in \mathbb{R}_{>0}$, tels que $R > r$, on a

$$M(r) \leqslant \frac{R+r}{R-r}\,|f(0)| + \frac{2r}{R-r}A(R).$$

1. Montrer que pour tous $n \geqslant 1$ on a

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} \Re(f(re^{i\theta}))e^{-in\theta}d\theta.$$

On commence par observer que pour $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\int_0^{2\pi} e^{int}dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a de plus $\Re(f(re^{it})) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n e^{int} + \bar{a}_n e^{-int})r^n$. Comme cette série converge normalement, on peut échanger l'intégrale et la somme pour obtenir

$$\int_0^{2\pi} \Re(f(re^{it}))e^{-int}dt = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} r^k \int_0^{2\pi} [a_k e^{ikt} + \bar{a}_k e^{-ikt}]e^{-int}dt.$$

Or dans cette somme, tous les termes pour $k \neq n$ s'annulent par la formule ci-dessus, et on obtient

$$\int_0^{2\pi} \Re(f(re^{it}))e^{-int}dt = r^n \pi a_n.$$

2. On suppose dans cette question que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $r > 0$ on a

$$|a_n| \leqslant \frac{2A(r)}{r^n}.$$

En déduire que pour tous $R > r > 0$, $M(r) \leqslant \frac{2rA(R)}{R-r}$.
D'après la formule précédente on a

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} \left|\Re(f(re^{i\theta}))\right| d\theta \leqslant \frac{2A(r)}{r^n}.$$

On majore maintenant la série. Sous l'hypothèse que $f(0) = 0$, en utilisant l'inégalité précédente en $R \geqslant r$

$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} r^n |a_n| \leqslant 2A(R)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n = 2A(R)\left(\frac{R}{R-r} - 1\right) = \frac{2rA(R)}{R-r}.$$

Ainsi on conclut que $M(r) = \sup_{|z|=r}|f(z)| \leqslant \frac{2rA(R)}{R-r}$.

3. Conclure.
On applique ce qui précède à $g(z) = f(z) - f(0)$ et on obtient

$$M(r) - |f(0)| \leqslant \frac{2r(A(r) + |f(0)|)}{R-r},$$

ce qui donne bien $M(r) \leqslant \frac{R+r}{R-r}|f(0)| + \frac{2r}{R-r}A(R)$.